Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026

BAREM DE CORECTARE, CLASA A XI-A

Subiectul 1. Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x & 3y & 3z \end{pmatrix}^{2026} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Suplimentul Gazetei Matematice 5/2026

Soluție: Oficiu. ..... 1 p

Dacă $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x & 3y & 3z \end{pmatrix}$ și $S = x + 2y + 3z$, atunci $A^2 = S \cdot A$ ..... 2 p

Prin inducție rezultă că $A^n = S^{n-1} \cdot A$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. ..... 2 p

Rezultă $S^{2025} \cdot x = 2$, $S^{2025} \cdot y = 1$ și $S^{2025} \cdot z = -1$. ..... 1 p

Așadar $S^{2026} = S^{2025} \cdot (x + 2y + 3z) = S^{2025} \cdot x + 2\left(S^{2025} \cdot y\right) + 3\left(S^{2025} \cdot z\right) = 2 + 2 - 3 = 1$. ..... 2 p

Pentru $S = 1$, obținem $(x, y, z) = (2, 1, -1)$. ..... 1 p

Pentru $S = -1$, obținem $(x, y, z) = (-2, -1, 1)$ ..... 1 p

Subiectul 2. a) Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 1$, astfel încât $a_n \neq 0$, $\frac{(2n+1)^2}{a_n} - \frac{(2n-1)^2}{a_{n+1}} = 8n^2 - 2$ și $b_n = \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} - \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Dați un exemplu de șir mărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ care nu este convergent, dar pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

Soluție: Oficiu. ..... 1 p

a) Demonstrația, eventual prin inducție, a faptului că $a_n = \frac{1}{2n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. ..... 2 p

$b_n - b_{n-1} = \frac{4n-1}{4n-3} - \frac{4n+1}{4n-1} = \frac{4}{(4n-3)(4n-1)} > 0$, pentru orice $n \geq 2$, deci șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. ..... 1 p

$b_n = 3 - \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{5}\right) - \left(\frac{9}{7} - \frac{11}{9}\right) - \ldots - \left(\frac{4n-3}{4n-5} - \frac{4n-1}{4n-3}\right) - \frac{4n+1}{4n-1} < 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, așadar șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. ..... 2 p

Din teorema lui Weierstrass rezultă că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent. ..... 1 p

b) Fie $x_n = \cos\left(\sqrt{n}\pi\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $x_n \in [-1, 1]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este mărginit..... 1 p

Obținem $x_{n+1} - x_n = \cos\left(\sqrt{n+1}\pi\right) - \cos\left(\sqrt{n}\pi\right) = -2\sin\frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\pi}{2} \cdot \sin\frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\pi}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=-2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\cdot\sin\dfrac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\pi}{2}=0$. ..... 1 p

$x_{4n^2}=\cos 2n\pi=1\to 1$ și $x_{(2n+1)^2}=\cos(2n+1)\pi=-1\to -1$, deci șirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ nu este convergent. ..... 1 p

Subiectul 3. Fie $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu $A={}^tA$ și $B={}^tB$. Demonstrați că dacă $\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)=\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)$, atunci $AB=BA$ (am notat cu ${}^tX$ transpusa, iar cu $\operatorname{tr}(X)$ urma matricei $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Andrei Horvat-Marc

Soluție: Oficiu. ..... 1 p

Fie $\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)=\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)=k\in\mathbb{R}$ și $M=AB-BA$.

Pe de o parte, avem $k=\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)=\operatorname{tr}\left(AB^2A\right)=\operatorname{tr}\left(BA^2B\right)$, ... 2 p

iar pe de altă parte $k=\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)=\operatorname{tr}\left((BA)^2\right)$. ..... 2 p

Din $M^2=(AB)^2-AB^2A-BA^2B+(BA)^2$, rezultă că $\operatorname{tr}\left(M^2\right)=k-k-k+k=0$. ..... 1 p

Avem ${}^tM={}^t(AB-BA)={}^t(AB)-{}^t(BA)={}^tB\cdot{}^tA-{}^tA\cdot{}^tB=BA-AB=-M$. ..... 1 p

Din $M=-{}^tM$ rezultă că $\operatorname{tr}\left(M\cdot{}^tM\right)=-\operatorname{tr}\left(M^2\right)=0$. ..... 1 p

Dacă $M=\left(a_{ij}\right)_{1\leq i,\,j\leq n}$, atunci $0=\operatorname{tr}\left(M\cdot{}^tM\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)^2\right)$. ..... 1 p

de unde rezultă că $a_{ij}=0$, oricare ar fi $i, j=\overline{1,n}$. Atunci $M=O_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, adică $AB=BA$. ..... 1 p

Subiectul 4. Fie șirurile $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ și $\left(b_n\right)_{n\geq 0}$ cu $a_n, b_n\in(0,\infty)$ și $b_n=a_{n+1}-\dfrac{1}{2+a_n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, atunci:

a) demonstrați că șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ nu poate fi crescător;

b) dați un exemplu de șir $\left(b_n\right)_{n\geq 0}$ pentru care șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ nu este monoton;

c) demonstrați că șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ este convergent.

Dana Heuberger

Soluție: Oficiu. ..... 1 p

a) Presupunem că șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ este crescător.

Deoarece $b_{n+1}-b_n=\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)+\dfrac{a_{n+1}-a_n}{(2+a_{n+1})(2+a_n)}\geq 0$, rezultă că șirul $\left(b_n\right)_{n\geq 0}$ este crescător. ..... 1 p

$0=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\geq b_0>0$, contradicție. Așadar presupunerea făcută a fost falsă, deci $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ nu poate fi crescător. ..... 1 p

b) Fie $b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, \text{ dacă } n \text{ este par}\\ \dfrac{1}{n}, \text{ dacă } n \text{ este impar}\end{cases}$. Cum $b_{2k}=\dfrac{1}{2k+1}\to 0$ și $b_{2k+1}=\dfrac{1}{2k+1}\to 0$, rezultă că $b_n\to 0$. ..... 1 p

Avem $a_{2k+1}=b_{2k}+\frac{1}{2+a_{2k}}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2+a_{2k}}$ și $a_{2k+2}=b_{2k+1}+\frac{1}{2+a_{2k+1}}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2+a_{2k+1}}$,

în consecință obținem $a_{2k+2}-a_{2k+1}=\frac{1}{2+a_{2k+1}}-\frac{1}{2+a_{2k}}=\frac{a_{2k}-a_{2k+1}}{(2+a_{2k+1})(2+a_{2k})}$. $(*)$

Dacă $a_{2k}=a_{2k+1}\overset{not.}{=}\alpha>0$, rezultă că $\alpha=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2+\alpha}$, deci $(2k+1)\alpha^2+(4k+1)\alpha-(2k+3)=0$, însă din relațiile lui Viète rezultă imediat că ecuația precedentă are soluțiile negative, contradicție. ..... 1 p

Așadar $a_{2k}\neq a_{2k+1}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$. Dacă $a_{2k}<a_{2k+1}$, din $(*)$ rezultă că $a_{2k+2}<a_{2k+1}>a_{2k}$, iar dacă $a_{2k}>a_{2k+1}$, din $(*)$ rezultă că $a_{2k+2}>a_{2k+1}<a_{2k}$, prin urmare șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ nu este monoton. ..... 1 p

c) Dacă ar exista $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\overline{\mathbb{R}}$, trecând la limită în recurența din ipoteză, deducem că ar trebui să avem $0=a-\frac{1}{2+a}$. Deoarece $a_n>0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, deducem că $a\geq 0$ și obținem că singura valoare posibilă a limitei ar fi soluția pozitivă a ecuației precedente, deci $a=\sqrt{2}-1$. ..... 1 p

Avem $|b_n|=\left|a_{n+1}-a-\left(\frac{1}{2+a_n}-\frac{1}{2+a}\right)\right|\geq|a_{n+1}-a|-\left|\frac{1}{2+a_n}-\frac{1}{2+a}\right|$ și deoarece $a_n>0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, obținem

$|a_{n+1}-a|\leq|b_n|+\frac{|a_n-a|}{(2+a_n)(2+a)}<|b_n|+\frac{1}{2+a}\cdot|a_n-a|$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ ..... 1 p

Fie $|a_n-a|=x_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Cum $\frac{1}{2+a}=a$, inegalitatea precedentă devine $x_{n+1}<|b_n|+a\cdot x_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Împărțind inegalitatea precedentă la a^{n+1} și notând $\frac{x_n}{a^n}=y_n$, deducem că $y_{n+1}<\frac{|b_n|}{a^{n+1}}+y_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, rezultă că există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n\geq n_\varepsilon$, $|b_n|\leq\frac{\varepsilon(1-a)}{2}$.

Așadar $y_{n+1}<\frac{\varepsilon(1-a)}{2\cdot a^{n+1}}+y_n$, $\forall\, n\geq n_\varepsilon$ ..... 1 p

Obținem că $y_n<\frac{\varepsilon(1-a)}{2}\left(\frac{1}{a^{n_\varepsilon+1}}+\frac{1}{a^{n_\varepsilon+2}}+\ldots+\frac{1}{a^n}\right)+y_{n_\varepsilon}$ și înmulțind inegalitatea precedentă cu a^n, rezultă că

$x_n<\frac{\varepsilon(1-a)}{2}\left(a^{n-n_\varepsilon-1}+a^{n-n_\varepsilon-2}+\ldots+1\right)+x_{n_\varepsilon}\cdot a^{n-n_\varepsilon}$, deci $x_n<\frac{\varepsilon\left(1-a^{n-n_\varepsilon}\right)}{2}+x_{n_\varepsilon}\cdot a^{n-n_\varepsilon}$, $\forall\, n\geq n_\varepsilon$.

Prin urmare, $x_n<\left(x_{n_\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot a^{n-n_\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n\geq n_\varepsilon$. $(**)$

$a=\sqrt{2}-1\in(0,1)$, așadar $\left(x_{n_\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot a^{n-n_\varepsilon}\to 0$, deci există $n_\varepsilon'\in\mathbb{N}$ astfel încât $\left(x_{n_\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot a^{n-n_\varepsilon}\leq\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n\geq n_\varepsilon'$.

Din $(**)$ rezultă că $x_n<\varepsilon$, pentru orice $\forall\, n\geq\max\left(n_\varepsilon,n_\varepsilon'\right)$, prin urmare $x_n\to 0$.

Așadar $a_n\to a$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}-1$. ..... 1 p